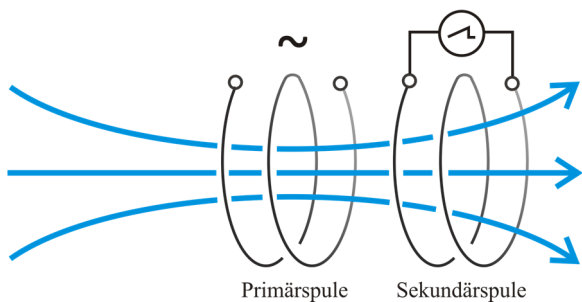


Induktionsgesetz und 1. Ableitung mit Transformator nachweisbar –oder nicht?



Induktionsgesetz

$$U_{Ind} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \Phi \sim I_{\text{Primär}}$$

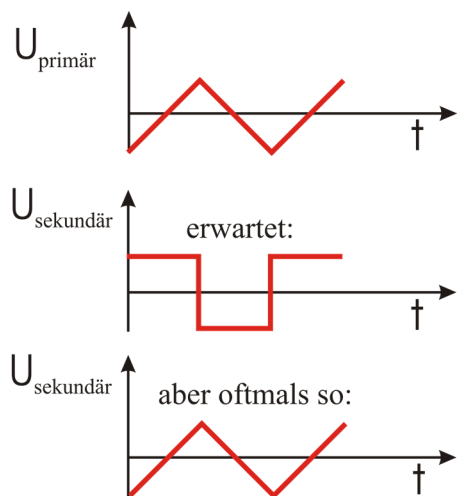
Potentialdifferenz* an der Sekundärspule = $- U_{Ind}$
 Damit wäre das Signal am Oszilloskop die zeitliche Ableitung des Signals an der Primärspule.

Versuche:

1) Der Eingang des Trenntrafos kann mit verschiedenen Signalformen gleicher Frequenz gespeist werden (Dreieck, Rechteck und Sinus). Dabei kann der Einfluss eines eingangsseitigen Widerstandes untersucht werden (Schalter umlegen).

2) Im Aufbau mit den zwei Spulen kann der Einfluss der Frequenz, hier mit Sinus am Eingang, untersucht werden (5 bzw. 2000 Hz).

Achten Sie auf die Kurvenform!



Erklärung (für unbelasteten Transformator; $X_L = \text{induktiver Blindwiderstand} = \omega \cdot L$)

Primärspule: $R \gg X_L$	Primärspule: $R \ll X_L$
stromeingepägt, der ohmsche Widerstand in der Primärspule überwiegt ($R_{\text{primär}}$ groß, f klein, $L_{\text{primär}}$ klein)	spannungseingepägt, der induktive Blindwiderstand in der Primärspule überwiegt ($R_{\text{primär}}$ klein, f groß, $L_{\text{primär}}$ groß)
$U_{\text{primär}} \sim I_{\text{primär}}$	$U_{\text{primär, Pot}} \sim \frac{dI_{\text{primär}}}{dt}$
Da die Sekundärspule das gleiche Magnetfeld wie die Primärspule durchsetzt, folgt:	
$U_{\text{sekundär, Pot}} \sim \frac{dU_{\text{primär}}}{dt}$	$U_{\text{sekundär, Pot}} \sim U_{\text{primär, Pot}}$

Beispielrechnung

Die Primärspule hat eine Induktivität L von 4 H und einen ohmschen Widerstand R von 2000 Ω .

$f = 5 \text{ Hz}$: $X_L = 126 \Omega$, $R \gg X_L$, aus Sinus wird Cosinus.

$f = 2000 \text{ Hz}$: $X_L = 50300 \Omega$; $R \ll X_L$, Sinus bleibt Sinus.

Fazit

Da ein Transformator in der Technik möglichst geringe Energieverluste haben soll oder ein Audioübertrager das Signal nicht verzerren darf, sind diese meist spannungseingepägt.

Möchte man dennoch das Induktionsgesetz mit der ersten Ableitung nachweisen, muss primärseitig $R \gg X_L$ sein.

* Vorzeichen Potentialdifferenz siehe Handout

Zum Mitnehmen!

Amplitude, soweit möglich groß wählen.

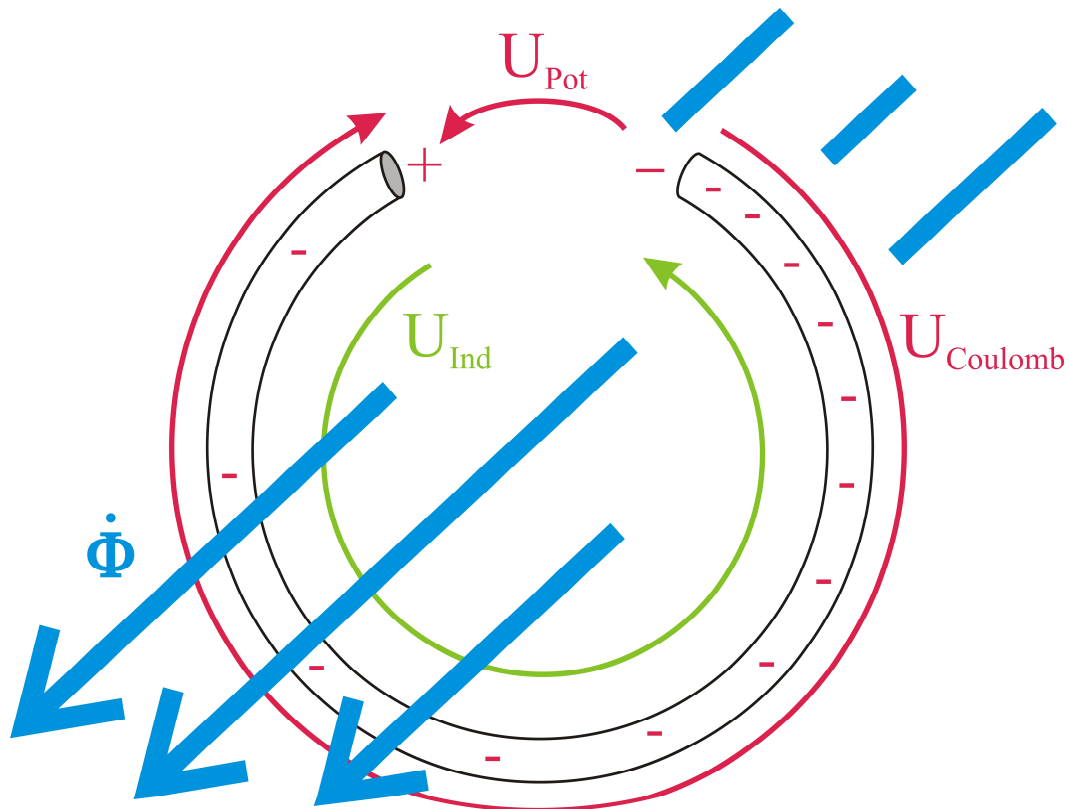
Aufbau; primärseitig Funktionsgenerator	stromeingeprägt = 1. Ableitung hier <u>überall</u>: Sinus → Cosinus Dreieck → Rechteck Rechteck → Peaks	spannungseingeprägt = gleiche Signalform
f = 600 Hz an den Stecker eines Trenntrafos → funktioniert am besten, wenn beide Fälle gezeigt werden sollen	mit R = 100 kΩ primärseitig in Reihe	Sinus, Dreieck, Rechteck
zwei 12000er Spulen direkt nebeneinander → Aufbau anschaulich und für das Induktionsgesetz (stromeingeprägt) gut	f = 5 Hz	f = 500 Hz; Sinus, Dreieck: geht einigermaßen; Rechteck zeigt extremes Einschwingen
zwei 12000er Spulen auf langem Eisenkern direkt nebeneinander	f = 0,5 Hz	f = 150 Hz; Sinus, Dreieck; Rechteck zeigt Einschwingen
“-“	mit R = 100 kΩ primärseitig in Reihe; f = 50 Hz	“-“
zwei 12000er Spulen auf geschlossenem U-Kern; f = 100 Hz	mit R = 1 MΩ primärseitig in Reihe	Sinus, Dreieck; Rechteck zeigt Einschwingen
zwei 1200er Spulen auf geschlossenem Schnittbandeisenkern; f = 200 Hz	mit R = 100 kΩ primärseitig in Reihe; bei Rechteck Ausgangspeak gleiche Spannung wie Eingangsspannung (!)	Sinus, Dreieck; Rechteck zeigt Einschwingen; Achtung: Ausgangsspannung bei Rechteck größer als Eingangsspannung! (ggf. Tastkopf verwenden)

(Spulen von Phywe verwendet.)

Zum Vorzeichen bei der Potentialdifferenz

1) Induktion

Momentaufnahme



In jedem Teilstück des Drahtes sind $E_{Ind} + E_{Coulomb} = 0$. (Hier Feldverlauf immer von - nach +.)
 U_{Ind} verschiebt also (in kurzer Zeit) die Elektronen so lange, bis $U_{Coulomb}$ genauso groß, aber entgegengesetzt ist. Damit ist:

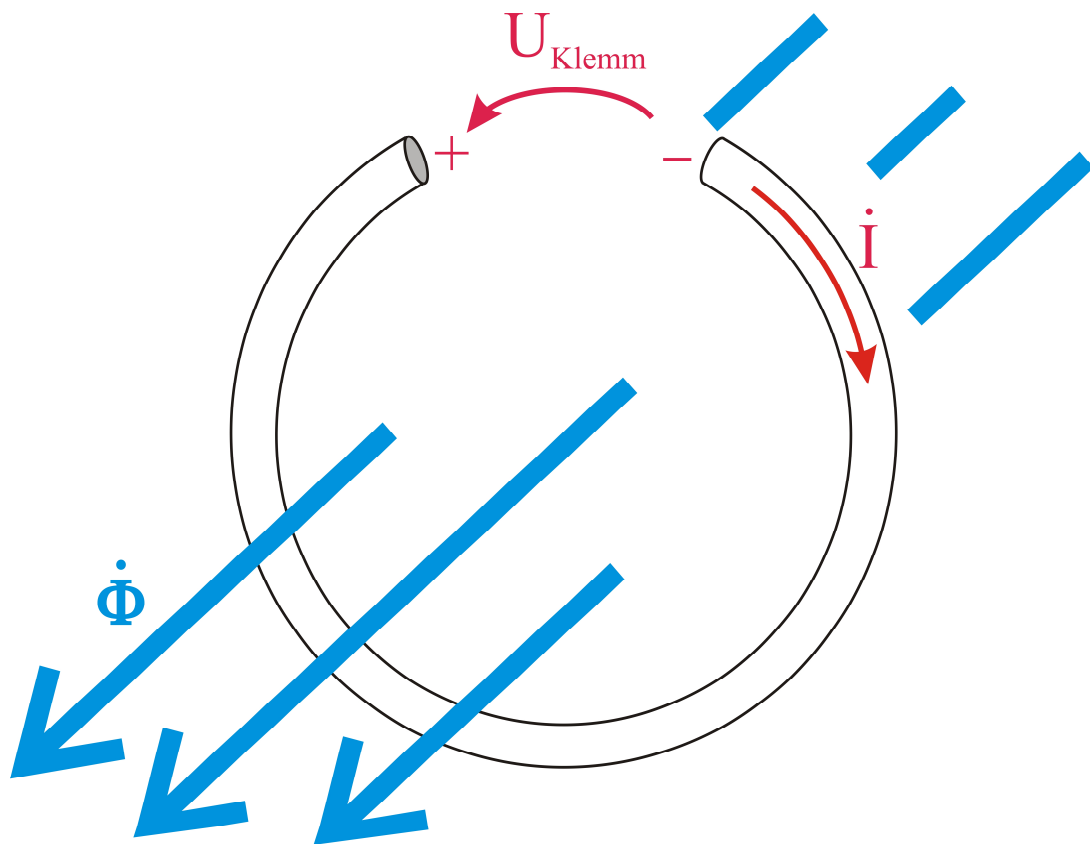
$$U_{Pot} = U_{Coulomb} = -U_{Ind}$$

Im spannungseingprägten Fall ist die Klemmspannung an der Primärspule gleich der Potentialdifferenz dort. (Da die Sekundärspule vom gleichen Magnetfeld und damit auch der gleichen Änderung durchsetzt wird, ist auch die in ihr erzeugte Potentialdifferenz die gleiche wie die angelegte Klemmspannung an der Primärspule, für den unbelasteten Transformator.)

$$U_{Klemm} = U_{Pot} = \frac{d\Phi}{dt}$$

(Im stromeingprägten Fall ist in der Primärspule ein ohmscher Widerstand in Reihe zu einer idealen Spule geschaltet. Für diese ideale Spule gilt auch obiges.)

2) Magnetfeld der Primärspule und absolutes Vorzeichen



- 1) Die Polung (+,-) ist eindeutig.
- 2) U , \dot{I} , $\dot{\Phi}$ sind vorzeichenbehaftet (z. B. in einem Diagramm), deshalb kann man die positiven Pfeilrichtungen beliebig festlegen.
- 3) Sinnvoll ist aber, dass im Moment der dargestellten Geometrie die angegebenen Pfeilrichtungen alle positiv sind. (Darüber hinaus ist es auch sinnvoll, dass die von \dot{I} erzeugte Magnetfeldänderung $\dot{\Phi}$ das gleiche Vorzeichen hat.)
- 4) Die Pfeilrichtungen für die Induktion und für das Magnetfeld entsprechen denen in der Literatur.
- 5) Im Bild (2) : U_{Klemm} treibt den Strom an. Nimmt I (also auch Φ) mit der Pfeilrichtung von \dot{I} zu (Zunahme von $-$ nach $+$ gerichtet), so ist U_{Pot} positiv. Nimmt I für die gleiche Pfeilrichtung ab, so ist U_{Pot} negativ (Abnahme von I wieder von $+$ nach $-$ gerichtet, jetzt ist die Polung aber andersrum, d. h. die Abnahme von I verläuft jetzt in die gleiche Richtung wie vorher die Zunahme). (\dot{I} ist also immer nach der Polung gerichtet.) Damit passen also Induktions- und Magnetfeldbetrachtungen zusammen.

$$U_{Klemm} = U_{Pot} = \frac{d\Phi}{dt} \sim \dot{I}$$

Deshalb ist die Potentialdifferenz an einer idealen Spule proportional zur 1. Ableitung nach der Zeit vom Strom.

(Die Sekundärspule ist für beide Einprägungen ideal, da durch sie kein Strom fließt.)

Quellen: J. Grehn, J. Krause (2004): Metzler Physik, S. 249, 251. Hannover: Schroedel Verlag
 R. W. Pohl (1975): Elektrizitätslehre, S. 60. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag
 D. Meschede (2004): Gerthsen Physik, S. 367. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag

Formel für die Phasenverschiebung zwischen Primärspannung und Sekundärspannung zu beliebigen X_L und R für Sinusverläufe

Eine ideale Spule und ein ohmscher Widerstand seien in Reihe geschaltet.

$$\Phi_{\text{primär}} \sim \Phi_{\text{sekundär}} \sim I_{\text{primär}}$$

Zwischen Primärstrom und Klemmspannung ist: $\varphi = \arctan \frac{\omega \cdot L}{R}$

D. h. der Primärstrom läuft der Klemmspannung um φ hinterher.

Die Klemmspannung sei $U = \sin(\omega \cdot t)$

Damit ist $I \sim \sin(\omega \cdot t - \varphi)$

$$\dot{I} \sim U_{\text{sekundär}} \sim \cos(\omega \cdot t - \varphi)$$

Beispiele:

1) $X_L \gg R \rightarrow \varphi = 90^\circ$

$U_{\text{sekundär}} \sim \cos(\omega \cdot t - 90^\circ) = \sin(\omega \cdot t) \sim$ der Klemmspannung, also spannungseingepägt.

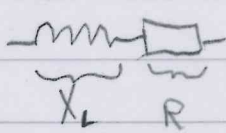
2) $X_L \ll R \rightarrow \varphi = 0^\circ$

$U_{\text{sekundär}} \sim \cos(\omega \cdot t) \sim$ der ersten Ableitung der Klemmspannung nach der Zeit, also stromeingepägt.

3) $X_L = R \rightarrow \varphi = 45^\circ$, d. h. für unsere Primärspule: $\omega \cdot L = 2000 \Omega \rightarrow f = 80 \text{ Hz}$.

Quelle: Fachkunde Elektrotechnik (1993), S. 126-127. Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel

Quantitative Betrachtung



} Ersatzschaltbild Primärspule

Momentanströme sind in einem Stromkreis überall gleich groß.

$$\hat{i} = \frac{u_R}{R}$$

ideal, für unbelasteten Trafo

$$u_{L_{\text{ind}}} = -\frac{d\Phi_L}{dt} = -L \cdot \frac{d\hat{i}}{dt} = -\frac{L}{R} \cdot \frac{du_R}{dt} = u_{\text{Ind Sek}}$$

$$u_{\text{ges}} = u_L + u_R \underset{\text{Pot}}{=} ; u_L \underset{\text{Pot}}{=} -u_{L_{\text{ind}}} = -u_{\text{Ind Sek}} = u_{\text{Pot Sek}}$$

$$\text{z.B. } u_R(t) = \hat{u}_R \cdot \sin(\omega t)$$

$$\leadsto u_L(t) = + \frac{L}{R} \cdot \hat{u}_R \cdot \cos(\omega t) \cdot \omega$$

$$\leadsto u_{\text{ges}}(t) = \hat{u}_R \cdot \left[\sin(\omega t) + \frac{\omega \cdot L}{R} \cos(\omega t) \right]$$

z.B. 1) Spannungseingepreßt: $X_L \gg R$

$$\leadsto u_{\text{Pot Sek}} \sim \cos(\omega t)$$

$$u_{\text{ges Prim}} \sim \cos(\omega t) \leadsto u_{\text{Pot Sek}} \sim u_{\text{ges Prim}} \checkmark$$

(außerdem im Idealfall Verstärkung 1.)

2) Stromeingepreßt: $X_L \ll R$

$$\leadsto u_{\text{ges Prim}} \sim \sin(\omega t) \checkmark$$

(außerdem im Idealfall Verminderung $\frac{X_L}{R}$.)

3) $X_L = R$; $\alpha = \omega t$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 2 \cdot \sin \frac{2\alpha + 90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{-90^\circ}{2}$$

$$\alpha + 45^\circ \quad 0,71$$

$$\leadsto u_{\text{ges Prim}} \sim \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 45^\circ) \checkmark$$

(außerdem im Idealfall Verminderung = 0,71.)